Teoretická část - 17.6.2021

1. (a) Definujte extrém vzhledem k množině (1 bod).
   (b) Zformulujte větu o nutné podmínce pro extrém (1 bod).
   (c) Zformulujte a dokažte větu o Lagrangeových multiplikátorech (4 body).
   (d) Definujme množiny $M_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$ a $M_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0\}$. Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:
      i. má-li $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ v bodě $(0, 0)$ lokální extrém, potom má v bodě $(0, 0)$ lokální extrém vzhledem k množině M_1,
      ii. má-li $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ v bodě $(0, 0)$ lokální extrém vzhledem k množině M_1, potom má v bodě $(0, 0)$ lokální extrém,
      iii. má-li $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ v bodě $(0, 0)$ lokální extrém vzhledem k množině M_1 a současně lokální extrém vzhledem k množině M_2, potom má v bodě $(0, 0)$ lokální extrém.

      Vše řádně zdůvodněte (2 body).

2. (a) Definujte okolí, otevřenou a uzavřenou množinu v metrickém prostoru, definujte vnitřek, uzávěr a hranici množiny (3 body).

   (b) Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:

      i. je-li (M, ρ) metrický prostor, $A, B \subseteq M$ otevřené, potom je $A \cup B$ otevřená,
      ii. je-li (M, ρ) metrický prostor, $A, B \subseteq M$ otevřené, potom je $A \cap B$ otevřená,
      iii. je-li (M, ρ) metrický prostor, $A_n \subseteq M$, $n \in \mathbb{N}$, otevřené, potom je $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ otevřená,
      iv. je-li (M, ρ) metrický prostor, $A_n \subseteq M$, $n \in \mathbb{N}$, otevřené, potom je $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ otevřená,
      v. je-li (M, ρ) metrický prostor, $A \subseteq M$, potom je A° otevřená,
      vi. je-li (M, ρ) metrický prostor, $A \subseteq M$, potom je $\overline{A}$ uzavřená,
      vii. je-li (M, ρ) metrický prostor, $A \subseteq M$ uzavřená, potom je $\partial(M \setminus A)$ uzavřená,
      viii. je-li (M, ρ) metrický prostor, $A \subseteq M$, potom je $\overline{A^\circ} = \overline{A}$.

   Vše řádně zdůvodněte (5 bodů).

3. (a) Definujte fundamentální systém a Wronského determinant (2 body).

   (b) Zformulujte větu o prostoru řešení homogenní lineární rovnice a větu o variaci konstant ($2,5$ bodu).

   (c) Větu o prostoru řešení homogenní lineární rovnice dokažte ($1,5$ bodu).

   (d) Nechť je $n \in \mathbb{N}$, dokažte, že množina funkcí $\{1, x, \ldots, x^{n-1}\}$ je fundamenálním systémem rovnice $y^{(n)} = 0$ (2 body).